Business School

CEIPA

Notas de Métodos Cuantitativos para los negocios

Francisco Javier Jaramillo Álvarez

Docente tiempo completo CEIPA

Notas de
Métodos Cuantitativos

Francisco Javier Jaramillo Álvarez
Docente tiempo completo CEIPA
Especialista en Estadística de la Universidad Nacional
Ingeniero de alimentos de la Corporación Universitaria Lasallista

Institución universitaria CEIPA
2011

Notas de
MÉTODOS CUANTITATIVOS
2011

Francisco Javier Jaramillo Álvarez
Docente tiempo completo CEIPA

ISBN 978-958-99767-2-2

CEIPA. Calle 77 sur Nº 40 - 165. Sabaneta, Colombia
Tel. (57-4) 3056100
www.ceipa.edu.co

Diagramación y diseño
Eliana Jaramillo Gaviria * elianajga@gmail.com

Hecho en Colombia

Sobre el Autor

Francisco Javier Jaramillo Álvarez. Especialista en Estadística; Ingeniero de Alimentos. Estudiante de Maestría en Educación y nuevas Tecnologías. Docente Escuela de Administración, Institución Universitaria CEIPA. e-mail: francisco.jaramillo@ceipa.edu.co

Presentación

Para la Escuela de Administración de la Fundación Universitaria Ceipa, es muy grato e importante presentar hoy, lo que conversacionalmente, y muy modestamente digo yo, hemos denominado "Notas de".

Estos "cuadernos de administración", adquieren su importancia por ser parte muy relevante en nuestro modelo educativo; todo su contenido responde a la arquitectura del núcleo temático para el cual fue elaborado; no significa lo anterior, que no sean de gran utilidad también para el estudiante de administración de empresas de cualquier otra institución, y para los profesores de administración, ya que su contenido recoge, en forma muy clara y breve, los aspectos fundamentales del tema propuesto; a los profesionales de la administración y directivos en general, les facilita la recordación de importantes conceptos administrativos.

Son varios los aspectos que debemos destacar en estas "Notas de"; son elaboradas por nuestros profesores y ello garantiza su pertinencia dentro de nuestro diseño curricular por núcleos problémicos; si bien retoman lo fundamental de la teoría de los temas tratados, ya en los casos que plantean y en los ejercicios que proponen, éstos se elaboran a partir del conocimiento de nuestra realidad, de nuestro entorno, y en mi modesto sentir, esa pertinencia las diferencia de la gran mayoría de los tratados de administración que se manejan en nuestras instituciones, y que contemplan realidades culturalmente muy diferentes a la nuestra; en este sentido, estamos seguros de que estamos haciendo un aporte muy importante, a la ciencia de la administración de empresas en Colombia.

Otro aspecto que consideramos debe destacarse, es que su elaboración, apunta más a facilitar el desarrollo de competencias, que a la adquisición de una erudición en la ciencia administrativa; diríamos en un lenguaje muy sencillo: apuntan más a lo urgente que a lo eminente, sin que lo eminente esté ausente de ellas.

Celebramos la iniciativa de la Escuela de Administración, quienes idearon estas publicaciones; felicitamos al Decano, a su equipo de directores de programas y a todos y cada uno de los profesores autores de ellas; todos deben sentir hoy la gran satisfacción de estar construyendo "administración de empresas colombiana" y de estar haciendo un gran aporte a la calidad de la formación de los profesionales colombianos.

Antonio Mazo Mejía
Rector Fundador

Tabla de Contenido

INTRODUCCIÓN

Estas notas pretenden convertirse en un material de apoyo para el desarrollo del núcleo de Métodos cuantitativos para los negocios en la Institución Universitaria Ceipa.

Los métodos cuantitativos buscan encontrar la solución óptima para un determinado problema; constituyen un acercamiento científico a la solución de problemas complejos, ya que al utilizar un conjunto de instrumentos matemáticos modela, optimiza y controla sistemas de la empresa. Tienen una gran importancia en los problemas de toma de decisiones y permiten elegir las decisiones más adecuadas para alcanzar un determinado objetivo, teniendo en cuenta las relaciones externas no controlables por quien debe tomar la decisión.

Los métodos cuantitativos son una herramienta importante que aplica métodos científicos y cuantitativos para ayudar a tomar decisiones más eficaces y a desarrollar sistemas más efectivos. La aplicación de los métodos cuantitativos como un enfoque racional formal en la toma de decisiones proporciona a quien las toma un conjunto de herramientas que lo capacitan para tomar decisiones de una manera lógica, consistente y con tanta precisión como sea posible y lo ayudan a mejorar su propio proceso intuitivo de toma de decisiones. Ahora, no puede negarse la importancia de los aspectos cualitativos en la toma de decisiones; es innegable que ambos se complementan a la hora de tomar una decisión acertada.

Los objetos de aprendizaje que se contemplan son:

1. Programación lineal.
2. Modelo de transporte y sus variantes.
3. Modelos de líneas de espera.

Los objetivos de aprendizaje pueden resumirse así:

- Utilizar los métodos cuantitativos básicos para apoyar los procesos de toma de decisiones administrativas.
- Diseñar sistemas óptimos de transporte, trasbordo y de asignación, mejorando la logística de las operaciones empresariales.
- Estudiar y modificar las medidas de rendimiento de los sistemas de líneas de espera, permitiendo ofrecer un mejor servicio a los clientes, sin afectar el rendimiento de la empresa.

El desarrollo de los métodos cuantitativos exige la realización de extensos cálculos; es por ello que es casi obvia la necesidad de un software porque de otra manera se perdería su practicidad. En los anexos se encuentra una guía para la utilización de dos de los programas más empleados para dicho fin: QSB y Solver de Excel.

NOCIONES PRELIMINARES

El análisis cuantitativo es el uso de técnicas científicas para la toma de decisiones administrativas sólidas. Es muy importante, entonces, que los administradores tengan un conocimiento claro de la aplicación de los Métodos Cuantitativos, pero se deben mirar como un apoyo, no como una solución completa y definitiva.

La finalidad de un análisis cuantitativo consiste en optimizar matemáticamente el beneficio de las decisiones que se tomen.

Se enfatizará, no tanto en los métodos en sí, sino más bien en la forma en que estos pueden contribuir a tomar mejores decisiones y a optimizar su beneficio.

El análisis de un problema incluye las siguientes etapas, definidas por Rander, Stair y Hanna (2006, p. 3-7)

1. **Definición del problema**: desarrollo de un planteamiento claro y conciso del problema; la experiencia ha demostrado que una mala definición de los problemas es la razón principal del fracaso de un análisis cuantitativo, pues este le dará significado y dirección a las siguientes fases.

   Cuando el problema no se define correctamente, todo el trabajo posterior se desarrolla sobre bases falsas, lo que conduce a una solución falsa. En el proceso se pierde tiempo, dinero, energía y recursos en general; en muchas ocasiones, equivocarse en esta etapa ha conducido a la quiebra de empresas y a situaciones sociales de gran impacto, sin mencionar la gran cantidad de energía emocional que se pierde en el proceso.

2. **Desarrollo de un modelo matemático**, que consiste en la representación del problema a resolver en un lenguaje matemático, de tal manera que conduzca al hallazgo de una solución apropiada. El modelo planteado debe describir los objetivos, las limitantes de recursos y otras relaciones que puedan existir; el proceso de plantear y solucionar modelos es la esencia del proceso de análisis cuantitativo.

   Experimentar con modelos requiere menos tiempo y es más barato que experimentar con las situaciones reales, reduciendo el riesgo. El valor de las conclusiones y decisiones basadas en modelos dependen de lo bien que represente el modelo la situación real.

3. **Adquisición de datos de entrada:** consiste en buscar los datos que se utilizarán en el modelo. Es primordial que sean precisos.

4. **Desarrollo y comprobación de la solución**. Después de desarrollar la solución, debemos analizar que esta sea compatible con todos y cada uno de los aspectos de la empresa (tecnología, factor humano, logística, capacidad instalada, entre otros).

5. **Análisis de resultados.**

6. **Implementación:** Si se realizan todos los pasos previos y no se implementan, se pierde el tiempo, y la recopilación y el análisis de la información. Si como administradores no se sabe enfocar toda la información al entorno, no se hace nada.

En resumen, cada uno de los pasos para darle un enfoque a un problema que requiere de un análisis cuantitativo es muy crítico. Todos los puntos son vitales, pues cada uno actúa como soporte del siguiente.

1. OBJETO DE APRENDIZAJE 1 PROGRAMACIÓN LINEAL

La programación lineal (PL) es una técnica de modelado matemático que ayuda a los administradores en la planificación y en la toma de decisiones de asignación de recursos, es decir, cómo utilizarlos con la mayor eficacia posible. El enfoque básico consiste en formular un modelo matemático que represente el problema y luego analizarlo.

El interés general consiste en optimizar algo (maximizarlo o minimizarlo).

1.1. Planteamiento del modelo

Cualquier modelo de programación lineal incluye variables de decisión, restricciones y función objetivo.

- **Variables de decisión**: lo que se quiere establecer.
- **Restricciones**: ecuaciones o desigualdades que describen la limitación de los recursos disponibles o unas condiciones específicas que deban satisfacerse (por ejemplo, si tiene que cumplirse un contrato).
- **Función objetivo**: lo que se quiere optimizar. Las situaciones que se solucionan a través de PL son aquellas que implican la maximización o la minimización de una función objetivo, teniendo en cuenta que se maximiza lo que sea conveniente para la empresa (como los ingresos y las utilidades) y se minimiza lo que no sea conveniente (como los costos).

Se llama lineal porque tanto la función objetivo como las restricciones son funciones matemáticas lineales. Por ello, la función objetivo y las restricciones deben expresarse como ecuaciones o desigualdades lineales (primer grado), es decir, de la forma $ax + by = c$.

La forma más simple de resolver un problema de programación lineal es el método gráfico; aunque solo es útil cuando hay únicamente dos variables de decisión, aporta una clara ilustración sobre la manera en que están estructurados los problemas más grandes.

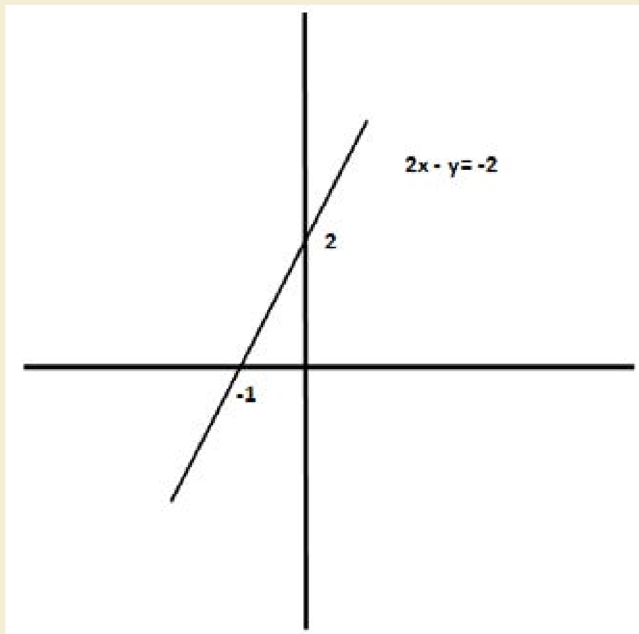
Cada desigualdad del sistema de restricciones determina un semiplano. El conjunto intersección de todos esos semiplanos recibe el nombre de zona factible y el vértice donde se presenta lo mejor es la solución óptima.

EJEMPLO 1

Grafica la desigualdad $2x - y \leq -2$

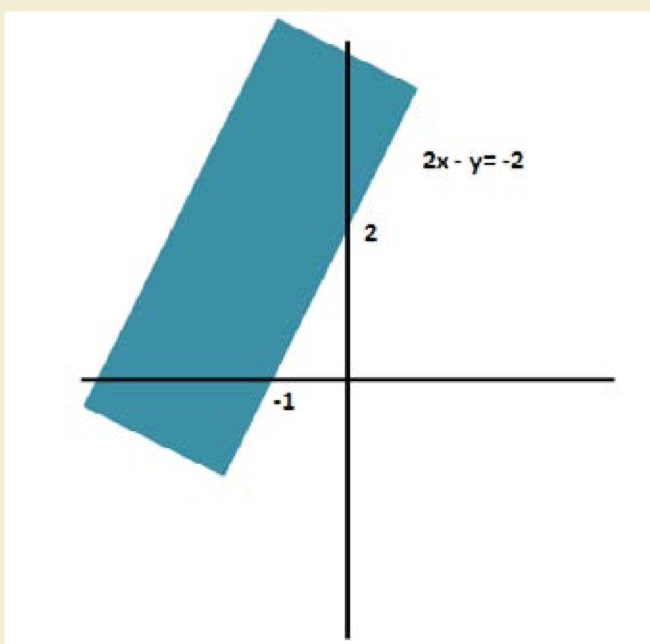
Solución:

Primero se debe graficar la igualdad $2x - y = -2$ y se obtiene:



Posteriormente debe comprobarse con un punto que no esté sobre la recta si la desigualdad se cumple o no. Por facilidad se probará con el punto (o,o):

$$2x - y \leq -2 \quad \Rightarrow \quad 2(0) - (0) \leq -2 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq -2$$



Como la desigualdad no es cierta, el punto (0,0) no está incluido en el conjunto solución, por lo que puede concluirse que la solución está constituida por todos los puntos ubicados a la izquierda de la recta (región sombreada).

EJEMPLO 2

Cierta empresa produce dos tipos de juguetes: A y B. Los recursos están limitados a 1200 libras de plástico especial y 40 horas de producción semanalmente.

Por requerimientos de mercadeo y de capacidad de producción, no deben fabricarse más de 800 docenas en la semana y el número de docenas de A no puede exceder al número de docenas de B por más de 450.

La producción de una docena de A requiere 2 libras de plástico y 3 minutos de producción. La producción de una docena de B requiere 1 libra de plástico y 4 minutos de producción.

Se sabe, además, que el producto que deja mayores ganancias es A ($8000 por docena); mientras que B deja una utilidad de $5000 por docena.

La empresa desea maximizar la utilidad semanal. ¿Qué cantidad de cada juguete debe producir?

Solución:

Variables de decisión:
x = Cantidad producida de A (en docenas por semana)
y = Cantidad producida de B (en docenas por semana)

Función objetivo y restricciones:

Maximizar $8000x + 5000y$ (utilidad semanal en pesos)

Sujeto a: $2x + y \leq 1200$ (cantidad de plástico en libras)

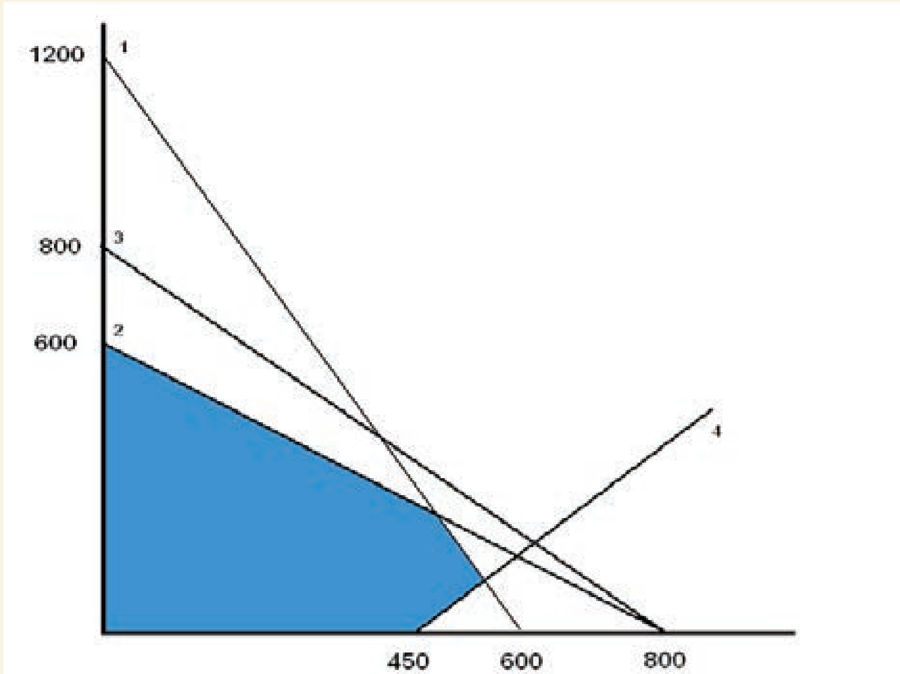
$3x + 4y \leq 2400$ (cantidad de producción en minutos)

$x + y \leq 800$ (límite de producción total)

$x - y \leq 450$ (producción en exceso de A)

$x \geq 0,\ y \geq 0$ (resultados positivos)

Lo primero que debe hacerse es graficar las restricciones (desigualdades) en un mismo plano y encontrar la región que satisface todas las desigualdades:



Se establece así la región factible, que está conformada por todos los puntos del interior del pentágono sombreado, incluyendo sus límites (porque las restricciones incluyen el igual).

Los posibles puntos óptimos corresponden a los puntos de corte de las rectas entre sí o a los cortes de estas con los ejes si estos están dentro de la región óptima.

El punto de corte de las líneas 1) y 2) puede encontrarse por igualación de las ecuaciones, así:

(1) $2x + y = 1200 \Rightarrow y = 1200 - 2x$ (2) $3x + 4y = 2400 \Rightarrow y = \frac{2400 - 3x}{4}$

(1) = (2): $1200 - 2x = \frac{2400 - 3x}{4} \Rightarrow 4800 - 8x = 2400 - 3x \Rightarrow \boxed{x = 480}$

Por lo tanto: $y = 1200 - 2(480) \Rightarrow \boxed{y = 240}$

El punto de corte entre las rectas 1) y 4) también está en la región factible. Trabajando de igual forma, se encuentra que el punto de corte es (550,100).

Igualmente, podrían ser solución óptima los puntos (0,600) y (450,0), que representan los cortes de la región factible con los ejes.

Si se evalúa la utilidad en esos puntos, se obtiene lo siguiente:

U = 8(480) + 5(240) = $5040 U = 8(550) + 5(100) = $4900

U = 8(0) + 5(600) = $3000 U = 8(450) + 5(0) = $3600

Puede deducirse, entonces, que la mayor utilidad se logra si se fabrican 480 docenas del juguete A y 240 docenas del juguete B. En este caso, la utilidad que se consigue es $5 040 000 por semana y se satisfacen todas las restricciones: Utiliza todo el plástico y las horas de producción; la producción total es de 720 docenas (menor o igual a 800 docenas) y la producción de A excede a la de B en 240 docenas (menor o igual a 450 docenas).

EJEMPLO 3

Cierta empresa fabrica dos artículos que se venden como materias primas a compañías que fabrican jabones para baño y detergente para ropa. Basado en un análisis de los niveles actuales de inventario y la demanda potencial para el mes siguiente, la gerencia de la empresa ha especificado que la producción combinada de los productos A y B debe ser en total al menos de 350 litros. Además, debe satisfacerse un pedido de un cliente importante de 125 litros del producto A. Cada litro del producto A requiere dos horas de procesamiento, mientras el producto B necesita una hora de procesamiento por litro; para el siguiente mes se dispone de 600 horas de tiempo de procesamiento. El objetivo es satisfacer estos requerimientos con un costo total de producción mínimo. Los costos de producción son $2000 por litro para el producto A y $3000 por litro para el producto B.

<u>Solución</u>:

Variables de decisión:
A = Cantidad producida de A (en litros)
B = Cantidad producida de B (en litros)

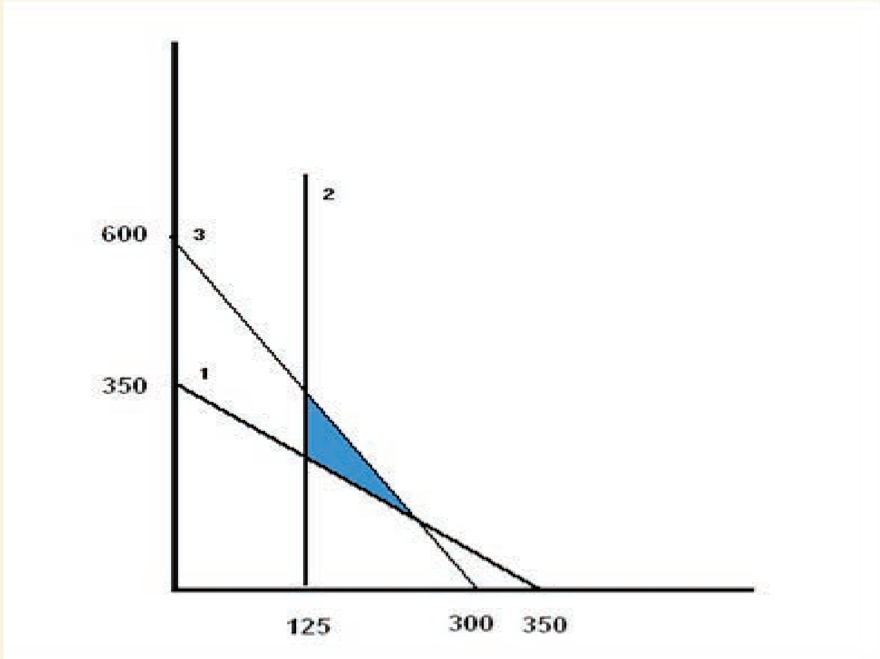
Función objetivo y restricciones:
Minimizar 2A + 3B (costo total)

Sujeto a:

$A + B \geq 350$ (la producción combinada debe ser al menos de 350 litros)

$A \geq 125$ (para satisfacer la demanda del cliente)

$2A + B \leq 600$ (limitación de tiempo de procesamiento)



El mínimo costo, cuando se satisfacen todas las condiciones requeridas, se logra cuando se producen 250 litros de A y 100 litros de B.

(Anderson, 2004, p. 247)

Los problemas anteriores se resuelven mediante el método gráfico. Este tiene la gran limitante de poder utilizarse únicamente si se tienen dos variables de decisión. Si el modelo incluye más de dos variables de decisión (o inclusive en este caso) se recomienda utilizar un software; en los anexos se muestra la forma de hacerlo con dos programas diferentes.

1.2. Análisis de sensibilidad

Un modelo de programación lineal, como tal, es muy estático porque los coeficientes de las restricciones y la función objetivo asumen valores fijos. Para agregar una dimensión dinámica y aumentar la aplicabilidad en la práctica, se aplica el análisis de sensibilidad, que estudia qué tanto se ve afectada la solución óptima según los cambios que se hagan en el modelo.

Los cambios que se hagan pueden ser:

1. En los coeficientes de la función objetivo.
2. En la disponibilidad de recursos.

Es importante considerar que los problemas reales ocurren en un ambiente cambiante, ya que se alteran los precios de las materias primas, la demanda del producto, las capacidades de producción, entre otros. El análisis de sensibilidad responde a esos cambios sin requerir una solución completa del problema.

1.2.1. Cambios en los coeficientes de la función objetivo

Si las restricciones no varían, pero cambia la función objetivo (por ejemplo, que cambie la contribución a la utilidad de cierto producto) se modifica la pendiente de la línea de utilidad; por lo tanto, puede suceder que el punto óptimo siga siendo el mismo, pero también puede ocurrir que sea diferente; como las restricciones no se alteran, la región factible sigue siendo la misma.

La pregunta es ¿cuánto puede cambiarse los coeficientes de la función objetivo antes de que otro punto se vuelva óptimo? Esto es posible responderlo sin necesidad de reformular y resolver nuevamente el problema gracias al análisis de sensibilidad, ya que los programas dicen cuáles son el aumento y la disminución permisibles sin que se altere la solución óptima (eso se llama rango de optimalidad). Hay que considerar que esto es cierto si se considera que todos los demás aspectos del problema original permanecen sin cambio (cambia solamente uno de los coeficientes de la función objetivo).

EJEMPLO 4

Encuentre el rango de optimalidad para los productos del ejemplo 2

Solución:

Nombre	Valor Solución	Coeficiente objetivo	Límite mínimo	Límite máximo
A	480	8000	3750	10000
B	240	5000	4000	10666,67

(en anexos se aclara la obtención de esta tabla)

La tabla anterior indica que la ganancia por docena de A puede disminuir hasta \$3750 o puede aumentar hasta \$10 000 sin que se altere la solución óptima, mientras todos los demás aspectos del problema original permanezcan inalterados. La ganancia por docena de B puede disminuir hasta \$4000 o aumentar hasta \$10 666,67, y la solución óptima sigue siendo la misma.

Si el interés recae en lo que sucedería si dos o más coeficientes de la función objetivo cambian simultáneamente debe aplicarse la **regla de 100%.** Dicha regla dice que "la solución óptima no varía si la suma de los porcentajes de cambio en relación al aumento o disminución permisible (según lo que ocurra) no es mayor de 100%.

EJEMPLO 5

¿Qué pasa con la solución óptima en el ejercicio 2 si ahora el producto A deja una ganancia de $6800 por docena y el producto B de $5500 por docena?

Solución:

Debe recordarse que los aportes originales a la utilidad eran $8000 para A y $5000 para B, lo que implica que A rebajó en $1200 su aporte y B lo aumentó en $500.

1200/4250 = 28,2% ($4250 es la disminución permisible)
500/5666.67 = 8,8% ($5666,67 es el aumento permisible)

Como dichos porcentajes no suman más del 100% puede concluirse que la solución óptima sigue siendo la misma inicial.

Es muy importante aclarar que la regla no afirma nada si el aumento es superior a 100% (la solución óptima podría cambiar, pero no necesariamente); en dicho caso, habría que resolver nuevamente el problema.

1.2.2. Cambios en la disponibilidad de recursos

Como cambian las restricciones, la región factible es diferente. Los cambios en la solución óptima están definidos por los precios sombra.

El precio sombra (también llamado precio dual) es el mejoramiento en la solución óptima por unidad de incremento en el lado derecho de una restricción.

EJEMPLO 6

Interprete los precios sombra en el ejercicio 2

Solución:

Nombre	Solución	Precio sombra	Restricción lado derecho	Límite mínimo	Límite máximo
Plástico	1200	3400	1200	600	1350
Tiempo	2400	400	2400	2050	2800
Nivel de producción	720	0	800	720	∞
Exceso de A	240	0	450	240	∞

Por ejemplo, si se aumenta la disponibilidad del plástico en una libra, la utilidad total aumentará en $3400 (precio sombra del plástico); si la disminuimos en una libra, la utilidad disminuirá en $3400. Un administrador debe evaluar si el cambio se justifica o no.

El precio sombra es aplicable únicamente para cierto rango; dicho rango está dado por los intervalos presentados. En este caso, el precio sombra se cumple si el plástico disponible está entre 600 y 1350 libras de plástico.

Del mismo modo, puede concluirse que, si se aumenta el tiempo disponible en un minuto, la utilidad total aumentará en $400 (precio sombra del tiempo); dicho precio sombra se cumple si el tiempo disponible está entre 2050 y 2800 minutos.

El análisis de sensibilidad se basa en la suposición de que solo cambia una de las restricciones. Si se alteran varias, debe aplicarse la regla de 100%.

EJEMPLO 7

¿Qué pasa con los precios sombra si la empresa decide comprar 50 libras de plástico adicionales y aumenta el tiempo disponible en 120 minutos?

Solución:

50/150 = 33,3% (aumento de plástico / aumento permisible de este material)

120/400 = 30% (aumento del tiempo / aumento permisible)

Como la suma de esos dos porcentajes es inferior a 100%, los precios sombra no cambiarán. Debe recordarse que si dicha suma es superior a 100% no puede concluirse que los precios sombra cambien.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Una persona dispone de 10 millones de pesos como máximo para repartir entre dos tipos de inversión (A y B). En la opción A desea invertir entre 2 y 7 millones. Además, quiere destinar a esa opción, como mínimo, tanta cantidad de dinero como a la B.

   Plantear el problema y representar gráficamente el conjunto de soluciones.

   ¿Qué cantidades debe invertir en cada una de las dos opciones para optimizar el rendimiento global si se sabe que el rendimiento de la inversión será del 9% en la opción A y del 12% en la B? ¿A cuánto ascenderá el rendimiento óptimo? (Sectormatemática, s.f.)

2. Un estudiante dedica parte de su tiempo al reparto de propaganda publicitaria. La empresa A le paga 50 pesos por cada impreso repartido y la empresa B, con folletos más grandes, le paga 70 pesos por impreso.

   El estudiante lleva dos bolsas: una para los impresos A, en la que caben 120 y otra para los impresos B, en la que caben 100. Ha calculado que cada día es capaz de repartir 150 impresos como máximo.

   ¿Cuántos impresos habrá que repartir de cada clase para que el beneficio diario sea máximo?
   (Bellini M., 2004)

3. Una empresa fabrica pinturas para interiores y exteriores. La tabla siguiente proporciona los datos básicos del problema:

Ton de materia prima de			
	Pintura para exteriores	Pintura para interiores	Disponibilidad diaria máxima (Ton)
Materia prima 1	6	4	24
Materia prima 2	1	2	6
Utilidad por Ton (millones de pesos)	5	4	

   Una investigación de mercado indica que la demanda máxima diaria de pintura para interiores es de dos toneladas.

   ¿Cuál es la mezcla óptima de productos para exteriores y para interiores que maximice la utilidad diaria total? ¿Cuál es la utilidad máxima que puede lograr en un día?

4. Cierta empresa está desarrollando un nuevo aditivo para combustibles de avión que consiste en una mezcla de tres ingredientes: A, B y C. Para un rendimiento apropiado, la cantidad total de aditivo (cantidad de A + cantidad de B + cantidad de C) debe ser al menos diez onzas por galón de combustible; sin embargo, debido a razones de seguridad, la cantidad de aditivo no debe exceder de quince onzas por galón de combustible.

   La combinación de los tres ingredientes es crítica: la cantidad de A debe ser como mínimo igual a la de B y la cantidad de C debe ser mayor o igual que la mitad de la cantidad del ingrediente A.

   Si los costos por onza para los ingredientes A, B y C son $200, $60 y $180, respectivamente, encuentre la mezcla de costo mínimo para cada galón de combustible para avión.

5. Cierta empresa fabrica tres acondicionadores de aire domésticos: un modelo económico, uno estándar y otro de lujo. Las ganancias por unidad son 63 000, 50 000 y 125 000 pesos, respectivamente. Los requerimientos de producción por unidad son los siguientes:

	Número de motores de ventilador	**Número de bobinas de enfriamiento**	**Tiempo de manufactura (horas)**
Económico	1	1	8
Estándar	1	2	14
De lujo	1	4	14

   Para el próximo período de producción, la compañía tiene 200 motores de ventilador, 320 bobinas de enfriamiento y 2400 horas de tiempo de manufactura disponibles.

   Se desarrolló el problema con la ayuda de un software y el informe de sensibilidad es:

Nombre	**Solución**	**Coeficiente objetivo**	**Límite mínimo**	**Límite máximo**
Económico	160	63000	31250	125000
Estándar	0	50000	0	83667
De lujo	40	125000	63000	252000

Nombre	**Solución**	**Precio sombra**	**Restricción lado derecho**	**Límite mínimo**	**Límite máximo**
Motores	200	42333	200	80	293, 3
Bobinas	320	20667	320	200	600
Tiempo (h)	1840	0	2400	1840	∞

Con base en la información responda las siguientes preguntas:

a. Plantee el modelo de programación lineal
b. ¿Cuántos modelos de cada tipo deben fabricarse para maximizar la utilidad? ¿Cuál es esa utilidad máxima posible?
c. ¿Cuáles son los precios sombra? ¿Qué indica cada valor?
d. ¿Por qué cree que para maximizar la utilidad se deban fabricar tantos modelos económicos si no es el que más utilidad deja? ¿Por qué cree que no se deben fabricar modelos estándar?
e. ¿La solución óptima cambiaría si la ganancia por unidad del modelo económico disminuye a $55 000? ¿Por qué?

(Anderson et al.,2004)

6. Una empresa fabrica 2 tipos de mesas:
   - Una mesa sencilla que necesita 10 kilos de madera, medio galón de pintura y una hora de mano de obra.
   - Una mesa más lujosa que requiere 15 kilos de madera, 0,75 galones de pintura y 2 horas de mano de obra.

   Una mesa sencilla deja una utilidad de $27 500 y una mesa lujosa deja una utilidad de $42 750. Para cada semana tienen disponibles 4800 kilos de madera, 220 galones de pintura y 816 horas de mano de obra (17 trabajadores, cada uno de los cuales labora 48 horas a la semana)

   ¿Cuánto se debe producir de cada una cada semana para maximizar la utilidad?

7. X es una empresa que fabrica puertas y pasamanos.
   Cada puerta utiliza 1 lámina de 20 kilogramos, 1 cerradura, 0,5 galones de pintura, 12 pernos y 15 minutos de mano de obra.

   Cada pasamanos requiere 4 metros de tubo, 8 pernos, 0,1 galones de pintura y 20 minutos de mano de obra.

   Una puerta deja una utilidad de $43 500 y un pasamanos deja una utilidad de $22 500.

   Mensualmente dispone de 212 horas de mano de obra, 40 000 kilogramos de lámina, 2000 cerraduras, 1330 galones de pintura, 10 000 metros lineales de tubo y 32 000 pernos.

   Deben entregar mensualmente 600 puertas a Homecenter.

   ¿Cuántas puertas y pasamanos debe producir al mes la empresa para maximizar la utilidad? Haga un análisis de sensibilidad.

2. OBJETO DE APRENDIZAJE 2 MODELO DE TRANSPORTE Y SUS VARIANTES

Ya vimos cómo optimizar la producción. En este objeto de aprendizaje estudiaremos cómo distribuir de la manera más eficiente y eficaz para la empresa eso que ya se produjo.

Estos problemas constituyen un caso específico de programación lineal y son denominados problemas de flujo de red porque se representan gráficamente mediante una red.

Se estudiarán los modelos de transporte, trasbordo y asignación.

2.1. Modelo de transporte:

El problema consiste, específicamente, en distribuir mercancías desde varios puntos de origen (fuentes) a varios puntos de llegada (destinos), teniendo en cuenta que la cantidad de productos disponible en los puntos de origen es limitada y que se debe satisfacer una demanda requerida en los puntos de llegada.

Como se trata de una aplicación de los modelos de programación lineal, debe plantearse un modelo con variables de decisión, restricciones y función objetivo.

Las variables se denotan como x_{ij} donde i es el punto de origen, j es el punto de llegada y x es la cantidad de unidades embarcadas de un origen específico a un punto de llegada específico. Lo que debe buscarse, entonces, es la cantidad de productos que deben transportarse a través de cada ruta para satisfacer todos los requerimientos.

Un conjunto de restricciones está determinado por la capacidad de producción de cada fuente. Estas restricciones se plantean como una desigualdad con "menor o igual" ($\leq$) porque se puede dejar alguna mercancía en el punto de producción, pero no se podría transportar más de lo que se produce.

Otro conjunto de restricciones está determinado por las demandas de los puntos de llegada, pues se debe garantizar la satisfacción de dichas demandas en cada uno de ellos. Estas restricciones se plantean mediante ecuaciones (con =), pues para optimizar la función objetivo se debe transportar exactamente lo que se necesita en esos puntos de destino.

Generalmente la función objetivo consiste en minimizar los costos de transporte. Según los objetivos de la empresa, esa función podría cambiar; por ejemplo, si se trata de una empresa de repartos que debe transportar sus envíos en el menor tiempo posible, la función objetivo consiste en la minimización del tiempo de transporte; si se trata, por ejemplo, de una empresa cuya función principal es el transporte, el objetivo podría ser la maximización de la utilidad.

Lo anterior implica que antes de plantear el modelo se deben determinar las contribuciones de cada posible ruta a la función objetivo. Por ejemplo, si el objetivo es minimizar costo, debe conocerse el costo de transportar una unidad a través de cada ruta.

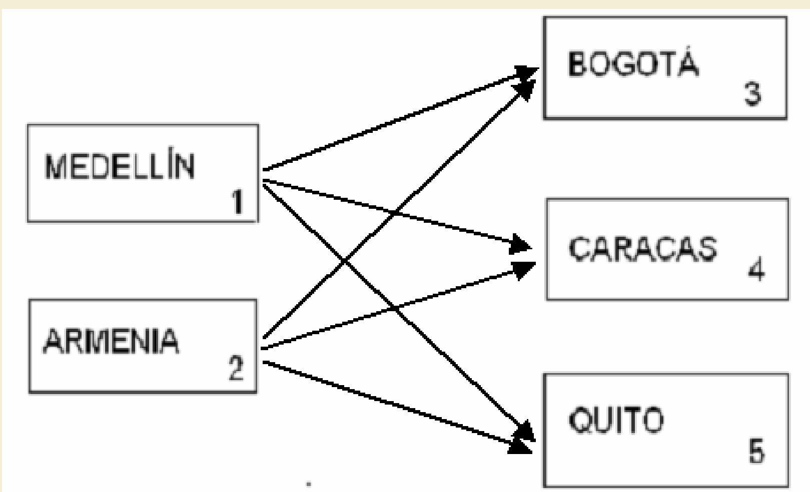
Los puntos de origen y destino se denominan **nodos** y las líneas que los conectan (posibles rutas) se denominan **arcos**.

EJEMPLO 1

Una empresa dedicada a la fabricación de componentes de ordenador tiene dos fábricas (una en Medellín y otra en Armenia) que producen, respectivamente, 800 y 1500 piezas mensuales. Estas piezas deben ser transportadas a Bogotá, Caracas y Quito, que necesitan 1000, 700 y 600 piezas, respectivamente. Los costos de transporte por pieza, en pesos, son los que aparecen en la tabla adjunta. ¿Cómo debe organizarse el transporte para que el costo sea mínimo?

	Bogotá	Caracas	Quito
Medellín	3000	9000	10000
Armenia	2000	7000	8500

Solución:



MODELO:
x_{13} = cantidad de piezas transportadas entre Medellín y Bogotá.
x_{14} = cantidad de piezas transportadas entre Medellín y Caracas.
x_{15} = cantidad de piezas transportadas entre Medellín y Quito.
x_{23} = cantidad de piezas transportadas entre Armenia y Bogotá.
x_{24} = cantidad de piezas transportadas entre Armenia y Caracas.
x_{25} = cantidad de piezas transportadas entre Armenia y Quito.

Restricciones: $x_{13} + x_{14} + x_{15} \leq 800$ (suministro de Medellín)
$x_{23} + x_{24} + x_{25} \leq 1500$ (suministro de Armenia)
$x_{13} + x_{23} = 1000$ (demanda de Bogotá)
$x_{14} + x_{24} = 700$ (demanda de Caracas)
$x_{15} + x_{25} = 600$ (demanda de Quito)

Objetivo: Min $3000\,x_{13} + 9000\,x_{14} + 10000\,x_{15} + 2000\,x_{23} + 7000\,x_{24} + 8500\,x_{25}$

Solucionando el modelo en el programa se obtiene:

Costo	12800000
Medellín-Bogotá	800
Armenia-Bogotá	200
Armenia-Caracas	700
Armenia-Quito	600
Suministro de M	800
Suministro de A	1500
Demanda de B	1000
Demanda de C	700
Demanda de Q	600

Lo anterior indica que, para minimizar costos de transporte, deben transportarse 800 piezas de Medellín a Bogotá, 200 piezas de Armenia a Bogotá, 700 piezas de Armenia a Caracas y 600 piezas de Armenia a Quito. Las rutas Medellín-Caracas y Medellín-Quito no deberían utilizarse, es decir, todo lo que se produce en Medellín debería llevarse a Bogotá. Con esa solución óptima, el costo de transporte es $12 800 000.

Variaciones

a. Suministro total diferente a la demanda total: si el suministro es mayor a la demanda, simplemente hay bienes que no se transportan, sino que se dejan en el lugar de origen.

   Pero si la demanda es mayor que el suministro, habría una demanda insatisfecha; por lo tanto, no se podría satisfacer lo deseado; en este caso, hay que buscar desde un punto de vista administrativo qué hacer para poder satisfacer esa demanda. Para encontrar una solución óptima puede añadirse un origen ficticio.

b. Maximización de la función objetivo: en algunos casos de transporte, el objetivo no es minimizar costos sino maximizar ingresos o utilidades; esto se da principalmente en empresas cuya finalidad sea el transporte de bienes. Las restricciones no se alteran; el único cambio es que se maximiza la función objetivo (no se minimiza como es usual).

c. Mínimos o máximos de ruta: se establecen esos mínimos o máximos como otras restricciones. Por ejemplo, considerando el caso que se viene evaluando, si por alguna causa no se pueden transportan más de 200 piezas entre Armenia y Quito, se agrega una nueva restricción que indique que $x_{25} \leq 200$.

d. Rutas inaceptables: se elimina la variable correspondiente.

EJEMPLO 2

En el ejemplo anterior considere que entre Armenia y Quito no se pueden transportar más de 200 piezas mensualmente porque la carretera está muy mala y de Medellín no se debe transportar nada a Caracas.

Solución:

MODELO:

x_{13} = cantidad de piezas transportadas entre Medellín y Bogotá.
x_{15} = cantidad de piezas transportadas entre Medellín y Quito.
x_{23} = cantidad de piezas transportadas entre Armenia y Bogotá.
x_{24} = cantidad de piezas transportadas entre Armenia y Caracas.
x_{25} = cantidad de piezas transportadas entre Armenia y Quito.

Restricciones:
$x_{13} + x_{15} \leq 800$ (suministro de Medellín)
$x_{23} + x_{24} + x_{25} \leq 1500$ (suministro de Armenia)
$x_{13} + x_{23} = 1000$ (demanda de Bogotá)
$x_{24} = 700$ (demanda de Caracas)
$x_{15} + x_{25} = 600$ (demanda de Quito)
$x_{25} \leq 200$ (máximo de la ruta Armenia-Quito)

Objetivo: Min $3000\, x_{13} + 10000\, x_{15} + 2000\, x_{23} + 7000\, x_{24} + 8500\, x_{25}$

Solucionando el modelo en el programa se obtiene:

Costo	13000000
Medellín-Bogotá	400
Medellín-Quito	400
Armenia-Bogotá	600
Armenia-Caracas	700
Armenia-Quito	200

Lo anterior indica que, para minimizar costos de transporte con las condiciones impuestas y cumplir con todos los requerimientos, deben transportarse 400 piezas de Medellín a Bogotá, 400 piezas de Medellín a Quito, 600 de Armenia a Bogotá y 700 piezas de Armenia a Caracas. Con esa solución óptima, el costo de transporte es $13 millones.

2.2. Modelo de trasbordo:

Es un caso específico del modelo de transporte en el que existen nodos de trasbordo, es decir, puntos intermedios que funcionan como línea de enlace entre los puntos de origen y los puntos de llegada. Para solucionar el modelo, debe considerarse que los nodos de trasbordo son sitios transitorios simplemente (todo lo que entra debe volver a salir).

EJEMPLO 3

Considere la misma empresa del ejemplo 1. Esta debe exportar su producción a Miami, Madrid y Santiago; en Miami se requieren 1.200 piezas/mes, mientras que en los otros destinos necesitan 550 piezas/mes cada uno. Se utilizan centros de embarque en Bogotá y Barranquilla. Recuerde que la empresa tiene dos fábricas (una en Medellín y otra en Armenia) que producen, respectivamente, 800 y 1500 piezas mensuales.

Los siguientes son los costos unitarios entre cada nodo de origen y cada nodo de trasbordo:

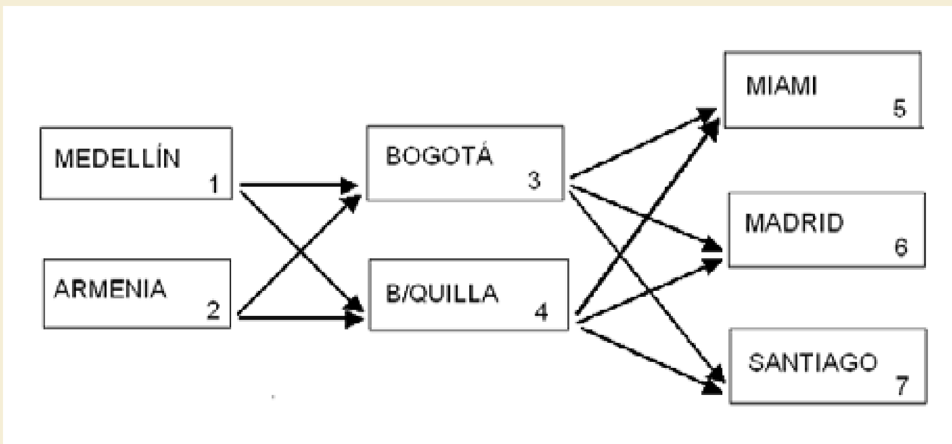
	Bogotá	**Barranquilla**
Medellín	3000	2300
Armenia	4200	4800

Y los siguientes son los costos unitarios entre cada nodo de trasbordo y cada nodo de llegada:

	Miami	**Madrid**	**Santiago**
Bogotá	40000	52000	22500
Barranquilla	28250	39000	27500

¿Cómo debe organizarse el transporte para que el costo sea mínimo?

Solución:



Restricciones:

$x_{13} + x_{14} \leq 800$ (suministro de Medellín)

$x_{23} + x_{24} \leq 1500$ (suministro de Armenia)

$x_{13} + x_{23} = x_{35} + x_{36} + x_{37} \Rightarrow x_{13} + x_{23} - x_{35} - x_{36} - x_{37} = 0$ (Bogotá)

$x_{14} + x_{24} = x_{45} + x_{46} + x_{47} \Rightarrow x_{14} + x_{24} - x_{45} - x_{46} - x_{47} = 0$ (B/quilla)

$x_{35} + x_{45} = 1200$ (demanda de Miami)

$x_{36} + x_{46} = 550$ (demanda de Madrid)

$x_{37} + x_{47} = 550$ (demanda de Santiago)

Función objetivo: Min $3000x_{13} + 2300x_{14} + 4200x_{23} + 4800x_{24} + 40000x_{35} + 52000x_{36} + 22500x_{45} + 28250x_{45} + 39000x_{46} + 27500x_{47}$

Solucionando el modelo se obtiene:

Costo	76435000
Medellín-Barranquilla	800
Armenia-Bogotá	550
Armenia-Barranquilla	950
Bogotá-Santiago	550
Barranquilla-Miami	1200

Barranquilla-Madrid	550
Suministro Medellín	800
Suministro Armenia	1500
Enlace Bogotá	0
Enlace Barranquilla	0
Demanda Miami	1200
Demanda Madrid	550
Demanda Santiago	550

Lo anterior indica que, para obtener un mínimo costo en el transporte, todo lo que sale de Medellín se debería llevar a Barranquilla, todo lo que sale de Bogotá se debería llevar a Santiago y lo que sale de Barranquilla, a Miami y Madrid.

2.3. Modelo de asignación:

Pretende asignar agentes a tareas, personal de ventas a clientes específicos, contratos a licitadores, etc. El modelo de asignación como tal determina una sola tarea para cada agente. Se busca un conjunto de asignaciones que optimicen un objetivo planteado (minimizar costo, minimizar tiempo, maximizar ganancia…)

La "cantidad embarcada" es 0 (no es asignado) o 1 (es asignado). El suministro en cada nodo de origen debe ser menor o igual a uno (o igual, o menor o igual a los que deba atender) y la demanda en cada nodo de destino debe ser igual a uno (para garantizar que todos los requerimientos sean atendidos).

No podemos desconocer que el modelo es una herramienta útil para la toma de decisiones que funciona a la perfección en el caso de máquinas, pero debe tenerse en cuenta que un administrador debe direccionar el recurso humano y cuando se trata de personas no puede guiarse únicamente por lo cuantitativo.

Definitivamente las actitudes y aptitudes de las personas deben influir al momento de asignar una tarea; no podríamos considerar que lo únicamente importante sea minimizar unos costos o maximizar una ganancia.

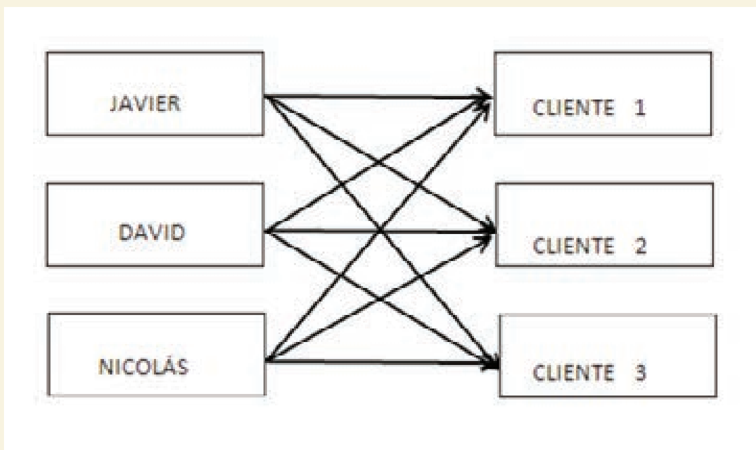
EJEMPLO 4

XXX es un despacho de contadores que tiene tres nuevos clientes a quienes se asignarán líderes de proyecto. Con base en los diferentes antecedentes y experiencia de los líderes, las diversas asignaciones líder-cliente difieren desde el punto de vista de los tiempos proyectados para completar los trabajos; las asignaciones posibles y los tiempos estimados (en días), para terminar cada proyecto son los siguientes:

	CLIENTE		
LÍDER DE PROY.	**1**	**2**	**3**
Javier	10	16	32
David	14	22	40
Nicolás	22	24	34

a. Elabore una representación de red de este problema.
b. ¿Cuál es el tiempo total requerido y a cual líder se le debe asignar cada cliente si el objetivo es minimizar el tiempo?

Solución:



Sean: X_{11} = Javier es asignado al proyecto 1
… x_{33} = Nicolás es asignado al proyecto 3

Objetivo:

Min $10x_{11} + 16x_{12} + 32x_{13} + 14x_{21} + 22x_{22} + 40x_{23} + 22x_{31} + 24x_{32} + 34x_{33}$

Sujeto a:
$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1$ (también podría ser con ≤ 1)
$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1$ (también podría ser con ≤ 1)
$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1$ (también podría ser con ≤ 1)
$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1$
$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1$
$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1$

El resultado que arroja el programa es:

Tiempo	64
X11	0
X12	1
X13	0
X21	1
X22	0
X23	0
X31	0
X32	0
X33	1

Eso quiere decir que se logra optimizar el tiempo total si el cliente 2 se asigna a Javier, el cliente 1 a David y el cliente 3 a Nicolás. Si se aplica esto, el tiempo necesario para completar el trabajo es 64 días (no quiere decir que se demore 2 meses el proyecto, sino que ese es el total de días a pagar).

Puede darse el caso en que un agente deba asignarse a dos o más tareas (asignaciones múltiples). Lo único que cambia en el modelo son las restricciones de los nodos de origen.

EJEMPLO 5

La empresa X tiene 3 vendedores que deben ser asignados a 6 clientes con el objetivo de minimizar los costos de atención. Los costos estimados (en miles de pesos) para cada vendedor son:

		CLIENTE					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
VEND.	**1**	30	18	22	15	10	12
	2	7	10	11	9	6	12
	3	10	12	15	11	10	10

Cuáles clientes se deben asignar a cada vendedor si:

a. ¿se deben asignar dos clientes a cada uno?
b. ¿no hay ninguna restricción?

Solución:

Sean: X_{11} = el vendedor 1 es asignado al cliente 1
... x_{33} = el vendedor 3 es asignado al cliente 3

a. Objetivo:

$$30x_{11} + 18x_{12} + 22x_{13} + 15x_{14} + 10x_{15} + 12x_{16} + 7x_{21} + 10x_{22} + 11x_{23} + 9x_{24} + 6x_{25} +$$

$$12x_{26} + 10x_{31} + 12x_{32} + 15x_{33} + 11x_{34} + 10x_{35} + 10x_{36}$$ (minimizar dicha función)

Sujeto a:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = 2$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} = 2$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} = 2$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1$$
$$x_{15} + x_{25} + x_{35} = 1$$
$$x_{16} + x_{26} + x_{36} = 1$$

Solucionando el modelo se obtiene que al vendedor 1 deben asignársele los clientes 5 y 6; al vendedor 2, los clientes 1 y 3; y al vendedor 3, los clientes 2 y 4.

b. Lo único que cambia es que las restricciones de los vendedores ya no se hacen iguales a 2, sino menores o iguales a 6 (número de clientes).

En este caso, la solución dice que al vendedor 2 se le deben asignar los clientes 1, 2, 3, 4 y 5, y al vendedor 3 se le debe asignar el cliente 6.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Una empresa colombiana exportadora de flores tiene un cultivo en Rionegro y otro en la sabana de Bogotá. Hay 2 ciudades de Norteamérica y una ciudad europea que sirven como centros de distribución. De esas 3 ciudades se distribuye a 4 minoristas; de ahí en adelante, la empresa ya no se preocupa de la cadena.

   El cultivo de Rionegro tiene capacidad de producción de 50 toneladas de flores semanalmente, mientras que el de Bogotá produce 30 toneladas de flores en el mismo período.

   Para cierta celebración específica, los centros minoristas presentaron las siguientes demandas:

   M1: 15 Ton M2: 40 Ton M3: 15 Ton M4: 10 Ton

   Los costos de transporte (en euros) están dados en las siguientes tablas:

De / A	**NA1**	**NA2**	**E1**
Rionegro	4	6	10
Bogotá	5	3	12

De / A	**M1**	**M2**	**M3**	**M4**
NA1	3	1	12	14
NA2	2	2	11	10
E1	15	10	2	4

   La Empresa desea diseñar un programa de transporte para ese día que minimice los costos de envío, sabiendo que las flores que se exportan no pueden estar más de una semana en almacenamiento.

   Plantee el modelo apropiado y encuentre una solución óptima que minimice los costos de transporte.

2. Carpintería Metálica S.A. es una empresa que fabrica puertas en sus plantas de producción de Medellín y Bogotá; debe llevarlas a Cartagena, Cali y Bucaramanga. La capacidad de producción mensual de la planta de Medellín es de 8000 unidades y de la de Bogotá es de 3500 unidades; las demandas requeridas en Cartagena, Cali y Bucaramanga son, respectivamente: 3000, 2500 y 5200 unidades.

Los costos de transporte por unidad (en pesos) de cada origen a cada destino son:

	Destino		
Origen	**Cartagena**	**Cali**	**Bucaramanga**
Medellín	3200	3750	2000
Bogotá	5600	2900	2350

¿Si se quiere minimizar el costo total, cuántas unidades se deben transportar a través de cada ruta?

3. Tres clientes de una empresa de investigación de mercados solicitaron que la firma realice una investigación muestral. Hay cuatro especialistas en estadística disponibles para estos proyectos; sin embargo, los cuatro están ocupados y, por tanto, cada uno puede manejar solamente un cliente. Los siguientes datos muestran la cantidad de horas requeridas por cada especialista para completar cada trabajo; las diferencias en tiempo se basan en la experiencia y la capacidad de los especialistas.

	Cliente		
Especialista	A	B	C
1	150	210	270
2	170	230	220
3	180	230	225
4	160	240	230

Si se pretende minimizar el tiempo total, ¿cuál especialista se debe asignar a cada cliente?
(Anderson, 2004, p. 451)

4. El sistema de distribución de cierta compañía consiste en tres plantas de producción, dos almacenes y cuatro clientes.

Las capacidades de las plantas y los costos de embarque por unidad (en pesos) de cada planta a cada almacén son los siguientes:

	Almacén		
Planta	**1**	**2**	**Capacidad**
1	8000	14000	450
2	16000	10000	600
3	10000	12000	380

La demanda de los clientes y los costos de embarque por unidad (en pesos) de cada almacén hasta cada cliente son:

	Cliente			
Almacén	**1**	**2**	**3**	**4**
1	12000	8000	16000	8000
2	6000	12000	14000	14000
Demanda	300	300	300	400

Determine el plan de embarque óptimo.
(Adaptado de Anderson, 2004, p. 452)

5. Una empresa de reparaciones acaba de recibir tres proyectos de reparación urgentes: Un radio, un tostador y una mesa de café rota. Tres personas, cada una con diferentes talentos y habilidades, están disponibles para realizar los trabajos; el propietario de la empresa estima cuánto costará asignar cada uno de los trabajadores a cada proyecto. Los costos se muestran en la siguiente tabla y difieren según la habilidad y velocidad de cada trabajador.

	Proyecto		
Trabajador	1	2	3
Horacio	22000	26000	12000
Ernesto	16000	20000	22000
Carlos	18000	24000	14000

El objetivo del propietario es asignar un proyecto a cada trabajador de tal manera que produzca el costo total más bajo para el taller. ¿Qué es más conveniente?

3. OBJETO DE APRENDIZAJE 3 MODELOS DE LÍNEAS DE ESPERA

Cuando la necesidad y demanda de un servicio es superior a la oferta y capacidad de prestación se forman colas o líneas de espera, que es un problema común en la vida diaria. La necesidad de analizar y comprender este problema dio origen a la Teoría de líneas de espera, que es un conjunto de modelos matemáticos que describen sistemas de líneas de espera particulares.

Se estudiarán algunos modelos comunes, aunque en la realidad se pueden dar algunas variaciones a lo evaluado.

Generalmente el administrador se encuentra en un dilema:

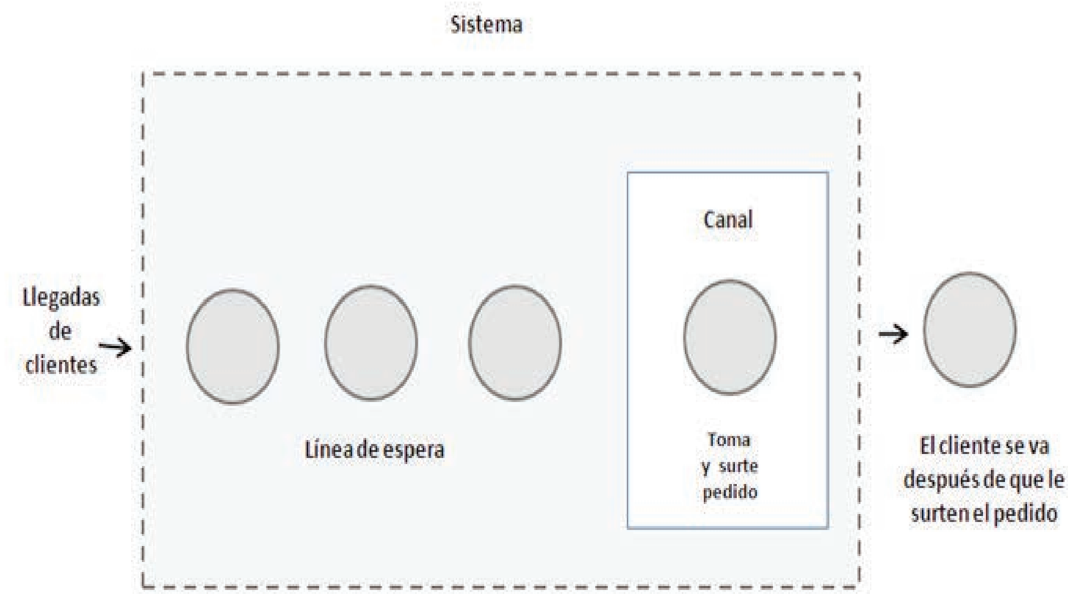
1. Asumir los costos derivados de prestar un buen servicio.
2. Asumir los costos derivados de tener largas colas, teniendo en cuenta que a la mayoría de personas les molesta mucho tener que esperar en una fila para ser atendidos y que largas colas pueden ocasionar diferentes situaciones como la pérdida de clientes.

Se debe lograr un balance económico entre el costo del servicio y el costo asociado a la espera por ese servicio.

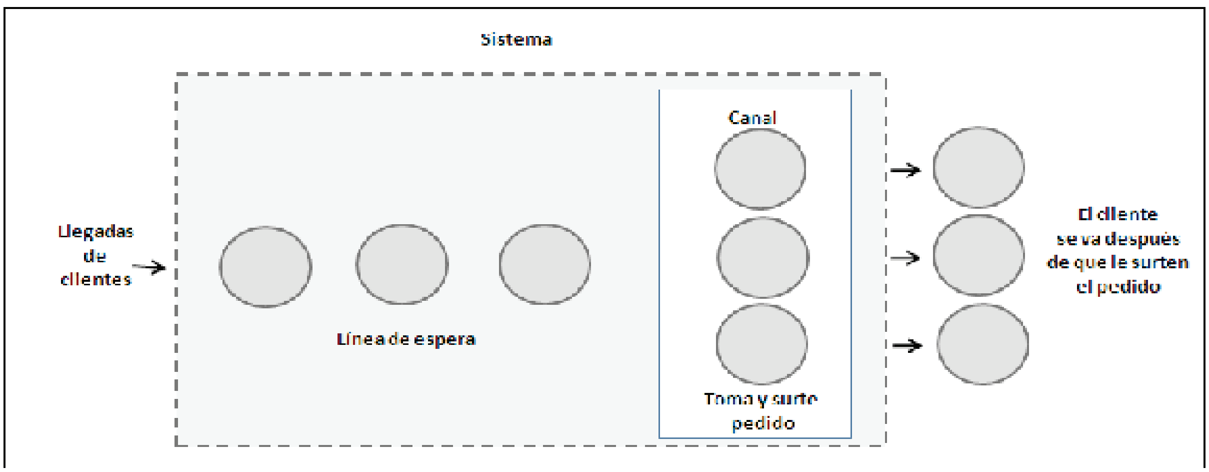
La teoría de colas, en sí, no resuelve este problema, pero proporciona información valiosa para la toma de decisiones. El objetivo es mantener los tiempos de espera dentro de límites tolerables.

3.1. Estructura básica de los modelos de colas

Los clientes que solicitan el servicio forman una fuente de entrada, ingresan al sistema y se unen a una línea de espera mientras esperan ser atendidos, luego reciben el servicio (a través de uno o varios canales) y finalmente salen del sistema.



MODELO DE COLAS CON UN SERVIDOR



MODELO DE COLAS CON VARIOS SERVIDORES

3.2. Características operativas

1. Tiempo promedio que pasa una unidad en la línea de espera. Obviamente, se espera que no sea muy alto porque ese tiempo es incómodo e inoportuno; pero si es muy bajo, puede indicar desperdicio de recursos.

2. Tiempo promedio que pasa una unidad en el sistema. Si no se cumple una meta de servicio debe pensarse en abrir nuevos canales o definir estrategias para aumentar la tasa de servicio por cada canal.

3. Cantidad promedio de unidades en la línea de espera.

4. Cantidad promedio de unidades en el sistema.

5. Probabilidad de que una unidad que llega tenga que esperar por el servicio.

6. Probabilidad de que no haya unidades en el sistema. Si es muy alta muestra que en muchos instantes el sistema estará vacío (si se está utilizando más de un canal, se podría pensar en disminuirlos) y si es muy baja indica que hay mucha aglomeración (si hay algún grado de aleatoriedad en el sistema –como normalmente ocurre– se correría un alto riesgo).

Estas medidas de desempeño pueden utilizarse para seleccionar el nivel de servicio que producirá un equilibrio razonable entre las dos situaciones en conflicto.

3.3. Parámetros importantes

k (número de canales): Número de servidores que hay en el sistema.

λ : Tasa media de llegada (cuántas unidades llegan en promedio en un período determinado de tiempo).

μ : Tasa media de servicio (cuántas unidades pueden ser atendidas en un período determinado de tiempo).

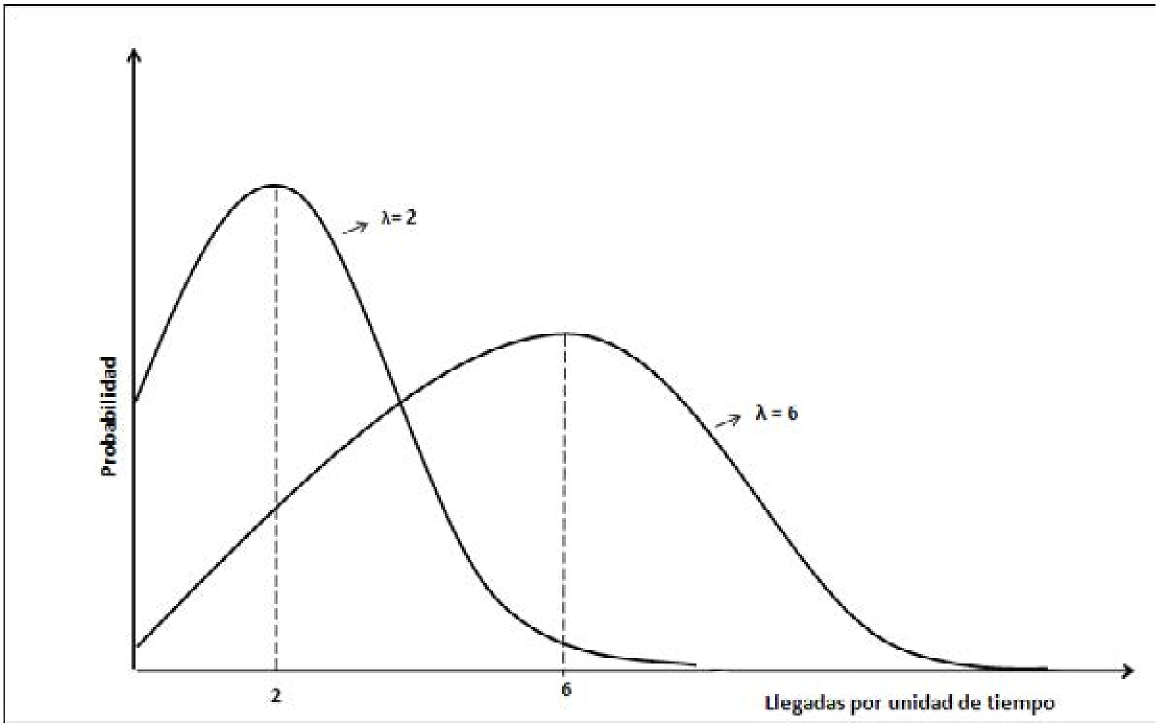
3.4. Distribución de llegadas

La suposición más frecuente es que las llegadas son aleatorias e independientes; por esta razón las llegadas se generan de acuerdo con un proceso *POISSON*.

$$P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$x = cantidad\ de\ llegadas\ en\ el\ período$$
$$\mu = cantidad\ promedio\ de\ llegadas\ en\ el\ período$$

Esta distribución presenta la siguiente estructura:



Casi siempre que en un sistema de líneas de espera intervienen humanos, su comportamiento se ajusta a una distribución de Poisson (esto sucede aproximadamente en un 90% de las situaciones). Cuando las operaciones que se ejecutan en la línea de espera son realizadas por un robot o por una máquina automática, sin la intervención de humanos, entonces se tiene una distribución constante.

Para modelar líneas de espera, se supone que el tiempo entre llegadas es constante, es decir, si la tasa de llegadas es de 20 clientes por hora, entonces el tiempo entre llegadas es 0,05 horas (1/20) ó 3 minutos.

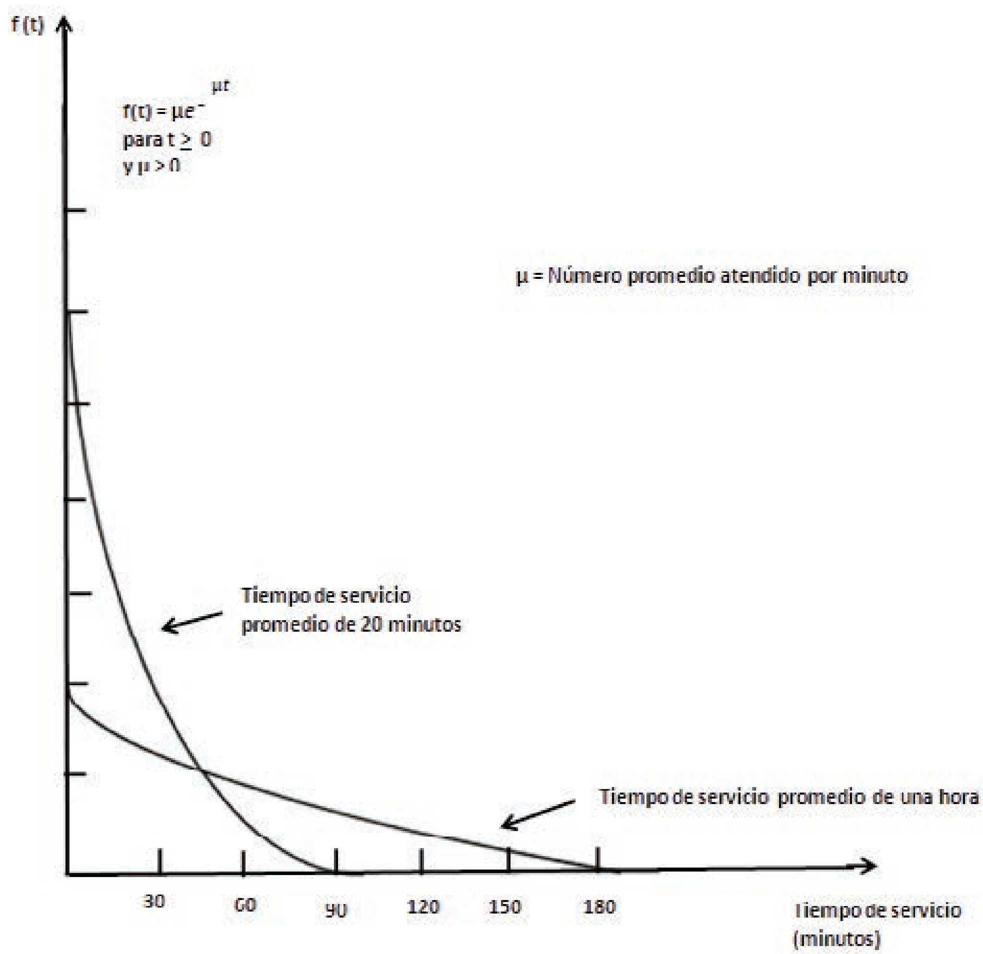
3.5. Distribución de tiempos de servicio

El tiempo de servicio es el tiempo que pasa un cliente en el sistema, luego de iniciar el servicio. Generalmente puede ajustarse mediante una distribución de probabilidad exponencial, que presenta la siguiente forma:

$$P(tiempo\, de\, servicio \leq t) = 1 - e^{-\mu\, t}$$

$$\mu = cantidad\, media\, de\, unidades\, que\, pueden\, servirse$$

Dicha distribución presenta la siguiente estructura:



Lo anterior supone, entonces, una mayor probabilidad para tiempos entre llegada pequeños. La probabilidad de que el tiempo de servicio sea menor o igual que un tiempo de duración t es:

$$P(tiempo\, de\, servicio \leq t) = 1 - e^{-\mu * t}$$

EJEMPLO 1

A un banco entran en promedio 114 clientes por hora y se pueden atender 75 clientes por hora.

a. ¿Qué tan probable es que en un espacio de un minuto lleguen 2 clientes o más?
b. ¿Qué tan probable es que un cliente se pueda atender en un minuto o menos?

Solución:

$\lambda = 114$ clientes/hora = 1,9 clientes/minuto
$\mu = 75$ clientes/hora = 1,25 clientes/minuto

a. $P(x \geq 2) = 1 - P(x \leq 1) = 1 - 0.4338 = 0.5663$

b. P(tiempo de servicio $\leq 1') = 1 - e^{(-1.25)(1)} = 0.713$

Nota: el valor 0,4338 se puede obtener de una tabla de probabilidades de Poisson o mediante la función Poisson de la categoría Estadísticas de Excel.

3.6. Modelos de líneas de espera

3.6.1. Modelo de un solo canal con llegadas de poisson y tiempos de servicio exponenciales

Para poder prestar un servicio eficiente con un solo canal, la tasa media de servicio debe ser mayor que tasa de llegada. Esta es una condición mínima para poder aplicar las ecuaciones que a continuación se presentan porque si la tasa de servicio no es mayor que la tasa de llegada, darían algunos resultados negativos que no tendrían sentido.

Las siguientes fórmulas se emplean, en este caso, para calcular las características operativas:

Probabilidad de que no haya unidades en el sistema: $P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$

Cantidad promedio de unidades en la línea de espera: $L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$

Cantidad promedio de unidades en el sistema: $L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$

(se puede usar cualquiera de las dos ecuaciones)

Tiempo promedio que pasa una unidad en la línea de espera: $W_q = \frac{L_q}{\lambda}$

Tiempo promedio que pasa una unidad en el sistema: $W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda}$

Probabilidad de que una unidad que llega tenga que esperar: $P_w = \frac{\lambda}{\mu}$

Probabilidad de n unidades en el sistema: $P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$

P_w también es conocido como factor de utilización.

EJEMPLO 2

Considere un establecimiento de renta de videos y DVD. Durante las noches entre semana, los clientes llegan con una tasa promedio de 1,25 clientes por minuto; el dependiente del mostrador puede atender un promedio de dos clientes por minuto. Suponga llegadas de Poisson y tiempos de servicio exponenciales.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya clientes en el sistema?

b. ¿Cuál es la cantidad promedio de clientes que esperan por el servicio?

c. ¿Cuál es el tiempo promedio que espera un cliente para que comience el servicio?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente que llega tenga que esperar por el servicio?

(Anderson, 2004, p. 630)

Solución:

a. $P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{1.25}{2} = 0.375$

b. $L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{1.25^2}{2(0.75)} = 1.04$ clientes

c. $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1.04}{1.25} = 0.832$ minutos = 50 segundos

d. $P_w = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1.25}{2} = 0.625$

3.6.2. Modelo con canales múltiples con llegadas de poisson y tiempos de servicio exponenciales

Las ecuaciones solo son aplicables si $k\mu > \lambda$; de lo contrario, sería insuficiente para atender las necesidades. Debe suponerse que todos los canales tienen la misma capacidad.

Si el montaje de los canales necesarios requiere una infraestructura física, el análisis de las líneas de espera debe hacerse para un período crítico (hora pico, días especiales...) si este es frecuente; tampoco tendría sentido, por ejemplo, que un restaurante monte una infraestructura exagerada previendo la afluencia de público el día de la madre y que permanezca casi vacío el resto del año.

Las siguientes fórmulas se emplean, si se tienen k canales, para calcular las características operativas:

Probabilidad de que no haya unidades en el sistema:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{k-1} \frac{(\lambda / \mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda / \mu)^k}{k!}\left(\frac{k\mu}{k\mu - \lambda}\right)}$$

Cantidad promedio de unidades en la línea de espera:

$$L_q = \frac{(\lambda / \mu)^k \lambda\mu}{(k-1)!(k\mu - \lambda)^2} P_0$$

Cantidad promedio de unidades en el sistema: $L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$

Tiempo promedio que pasa una unidad en la línea de espera: $W_q = \frac{L_q}{\lambda}$

Tiempo promedio que pasa una unidad en el sistema: $W = W_q + \frac{1}{\mu}$

Probabilidad de que unidad que llega tenga que esperar por el servicio:

$$P_w = \frac{(\lambda / \mu)^k}{k!}\left(\frac{k\mu}{k\mu - \lambda}\right) P_0$$

EJEMPLO 3

A un banco entran en promedio 114 clientes por hora y se presenta una tasa media de servicio de 1,25 clientes por minuto. Las llegadas se aproximan por una distribución de Poisson y el tiempo de servicio por una distribución exponencial.

¿Cuántos servidores debe tener como mínimo para prestar un servicio adecuado? Si se tiene ese número de canales, ¿cuál es la cantidad promedio de unidades en la línea de espera y cuánto tiempo pasan en promedio los clientes en ella?

Solución:

Un solo canal no es suficiente pues la tasa media de clientes que llegan (114 clientes por hora) es superior a la tasa media de servicio (75 clientes por hora). Se deben tener como mínimo dos canales; de esta manera $k\mu > \lambda$.

$\lambda / \mu = 114/75 = 1{,}52$

Si se tienen dos canales:

$$P_0 = \frac{1}{\frac{1.52^0}{0!} + \frac{1.52^1}{1!} + \frac{1.52^2}{2!}\left(\frac{2(75)}{(150-114)}\right)} = 0{,}1364$$

$$L_q = \frac{(1.52)^2(114)(75)}{1!(150-114)^2} \times 0.1364 = 2{,}08$$

$$W_q = \frac{2.08}{114} = 0.01825 \text{ horas} = 1{,}1 \text{ minutos}$$

Respuesta: En la línea de espera permanecen en promedio 2,08 clientes, los cuales permanecen en fila durante 1,1 minutos en promedio, lo que indica con el servicio con dos canales es muy eficiente.

3.6.3. Modelo de línea de espera de un solo canal con llegadas de poisson y tiempos de servicio que no se distribuyen exponencialmente

Es necesario tener en cuenta la desviación estándar del tiempo de servicio.

Las siguientes fórmulas se emplean, en este caso, para calcular las características operativas:

Probabilidad de que no haya unidades en el sistema: $P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$

Cantidad promedio de unidades en la línea de espera: $L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + (\lambda/\mu)^2}{2(1-\lambda/\mu)}$

Cantidad promedio de unidades en el sistema: $L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$

Tiempo promedio que pasa una unidad en la línea de espera: $W_q = \frac{L_q}{\lambda}$

Tiempo promedio que pasa una unidad en el sistema: $W = W_q + \frac{1}{\mu}$

Probabilidad de que una unidad que llega tenga que esperar: $P_w = \frac{\lambda}{\mu}$

Probabilidad de n unidades en el sistema: $P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$

EJEMPLO 4

Una tienda de ventas al menudeo presenta una tasa media de llegada de 21 clientes por hora. Un estudio del proceso de servicio muestra que el tiempo de servicio promedio es de dos minutos por cliente, con una desviación estándar de 1,2 minutos. Evalúe el sistema a partir de la valoración de sus características operativas.

Solución:

Primero que todo, si se necesitan dos minutos en promedio para atender a un cliente, en una hora pueden servirse 30 clientes (μ).

Además, 1,2 minutos = 0,02 horas (1,2/60)

$P_0 = 1 - \frac{21}{30} = 0{,}3$

$L_q = \frac{(21)^2(0.02)^2 + (21/30)^2}{2(1-21/30)} = 1{,}11$ clientes

$L = 1.11 + \frac{21}{30} = 1{,}81$ clientes

$W_q = \frac{1.11}{21} = 0{,}05286$ horas = 3,2 minutos

$W = 0.05286 + \frac{1}{30} = 0{,}0862$ horas = 5,2 minutos

Respuesta: aparentemente el servicio es muy bueno porque los tiempos son relativamente bajos y los promedios de clientes en la cola y en el sistema también son pequeños; sin embargo, para poder obtener una conclusión válida, habría que conocer los objetivos específicos de la compañía y sus características particulares.

Notas:

- Si los tiempos de servicio son constantes, entonces la desviación estándar es cero, pero se siguen utilizando las mismas ecuaciones.

- Una primera opción para mejorar el servicio en un sistema de espera consiste en aumentar la tasa media de servicio (solución muy obvia); otra alternativa para lograr ese objetivo, consiste en reducir la variación en los tiempos de servicio (su desviación estándar). Por lo tanto, si en el sistema no puede aumentarse la tasa media de servicio, una reducción en σ reduce la cantidad de unidades en la línea de espera y mejora todas las características operativas.

3.6.4. Modelo de canales múltiples con llegadas de poisson, tiempos de servicio arbitrarios y sin línea de espera:

Puede ocurrir que a las unidades que busquen servicio se les niegue el acceso si todos los canales están ocupados; esas unidades pueden perderse o pueden intentar acceder al sistema después. Eso sucede principalmente con las llamadas telefónicas (si el canal que se busca no está disponible, el que llama no entra a hacer una fila).

La probabilidad de que j de los k canales están ocupados se puede establecer así:

$$\boxed{Pj = \frac{(\lambda / \mu)^j / j!}{\sum_{i=0}^{k} (\lambda / \mu)^i / i!}}$$

Eso significa que si se quiere establecer el número de llegadas que son bloqueadas (se les niega el acceso), se debe establecer la probabilidad de que todos los canales que se tenga disponibles estén ocupados.

Otra característica operativa que puede ser importante es el número de usuarios promedio en el sistema (promedio de canales en uso), el cual se calcula de la siguiente forma:

$$\boxed{L = \frac{\lambda}{\mu}(1 - P_k)}$$

EJEMPLO 5

Una empresa maneja un sistema de pedidos telefónicos para sus productos de software. Para hacer sus pedidos, los clientes tienen que llamar a una línea 1800; las llamadas llegan con una tasa promedio de 12 llamadas por hora y un representante de ventas puede atender en promedio 6 llamadas por hora.

En la actualidad, el número telefónico tiene 3 canales internos, cada uno atendido por un representante de ventas.

Se ha encontrado que son muchos los clientes que no vuelven a llamar cuando encuentran la línea ocupada, lo cual significa pérdidas para la compañía; la administración quiere conocer el porcentaje de clientes que reciben señal de ocupado. Si la meta es proporcionar capacidad suficiente para manejar a 90% de los que llaman, ¿cuántas líneas telefónicas debería usar la empresa?

Solución:

$$P_3 = \frac{2^3/3!}{2^0/0!+2^1/1!+2^2/2!+2^3/3!} = 0{,}2105$$

Lo cual indica que con 3 canales, solo pueden atender en forma inmediata el 79% de las llamadas (el 21% se bloquearían).

Si el servicio se amplía a cuatro líneas:

$$P_4 = \frac{2^4/4!}{2^0/0!+2^1/1!+2^2/2!+2^3/3+2^4/4!} = 0{,}0952 \quad (9{,}5\%)$$

Eso implica que el 90,5% (100 – 9,5%) de los clientes se podrían atender en forma inmediata. Por lo tanto lo mejor es usar 4 canales

3.6.5. Modelos de línea de espera con poblaciones finitas de demandantes

Hasta ahora se ha considerado que la población que alimenta la cola es infinita, pero puede pasar que dicha población sea de un tamaño predeterminado; en este caso, la tasa de llegada disminuye a medida que aumenta la cantidad de unidades en el sistema porque mientras más alto sea su número, menos unidades hay disponibles para llegar.

Para las ecuaciones siguientes, se considera:

λ = tasa media de llegada para cada unidad (no tasa media de llegadas)

μ = tasa media de servicio
N = tamaño de la población

Probabilidad de que no haya unidades en el sistema:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}$$

Cantidad promedio de unidades en la línea de espera:

$$L_q = N - \frac{\lambda + \mu}{\lambda}(1 - P_0)$$

Cantidad promedio de unidades en el sistema: $L = L_q + (1 - P_0)$

Tiempo promedio que pasa una unidad en la línea de espera:

$$W_q = \frac{L_q}{(N-L)\lambda}$$

Tiempo promedio que pasa una unidad en el sistema: $W = W_q + \frac{1}{\mu}$

Probabilidad de que una unidad que llega tenga que esperar: $P_w = 1 - P_0$

Probabilidad de n unidades en el sistema: $P_n = \frac{N!}{(N-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \; para\, n = 0,1 \ldots N$

3.6.6. Otros modelos

Hay una amplia variedad de modelos; existe un código de clasificación para los diferentes tipos de líneas de espera desarrollado por Kendall. La forma general de la notación es *A/B/k*: *A* representa la distribución de probabilidades para las llegadas; *B*, la distribución de probabilidades para el tiempo de servicio y *k*, la cantidad de canales.

En las dos primeras posiciones se utilizan las siguientes letras:

M: si se puede aplicar una distribución de Poisson para las llegadas y una exponencial para el tiempo de servicio).

D: si ambas son determinísticas o constantes, o por lo menos una de ellas lo es.
G: si tienen otra distribución de probabilidades; en este caso, se deben conocer media y varianza.

Por ejemplo, un modelo M/D/3 indica que para las llegadas se puede aplicar una distribución de Poisson, que el tiempo de servicio es constante y que se tienen 3 canales.

3.6.7. Algunas relaciones generales para los modelos de líneas de espera

$L = \lambda W$

$L_q = \lambda W_q$

Estas relaciones se cumplen para cualquier modelo.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En las horas pico de la tarde, a la estación Poblado del Metro de Medellín llegan en promedio 2208 usuarios por hora; la tasa media de servicio por canal es 8 usuarios por minuto. Puede suponerse que las llegadas se distribuyen de acuerdo a una distribución de Poisson y los tiempos de servicio según una distribución exponencial.

    a. ¿Cuántos servidores tendrían que tenerse como mínimo para poder prestar un servicio eficiente? ¿Por qué?

    b. Halla la cantidad promedio de usuarios en la línea de espera y el tiempo promedio que pasa un usuario en la fila si se usa ese mínimo de servidores. ¿Cómo calificaría el servicio? Si no es muy bueno, ¿qué podría hacerse para mejorarlo?

2. En la situación anterior encuentre lo que pasa con L_q, L, W_q y W si se hacen las siguientes variaciones:

    a. No se utiliza el mínimo necesario de canales, sino uno más.

    b. La tasa de llegada no es 2208 usuarios por hora sino 3500 usuarios por hora (considere que la tasa de servicio permanece igual y que se utiliza el mínimo de canales necesario).

    c. La tasa de servicio no es 8 usuarios por minuto sino 6 usuarios por minuto (considere que la tasa de llegada permanece en su valor original y que se utiliza el mínimo de canales necesario).

3. A una estación de gasolina llegan en promedio 45 clientes por hora y se tiene capacidad para atender en promedio a 60 clientes por hora. ¿Cuál es la cantidad promedio de unidades en el sistema y el tiempo promedio que pasa un cliente en el sistema si se usa un solo canal? Suponga que las llegadas se distribuyen de acuerdo a una distribución de Poisson y los tiempos de servicio según una distribución exponencial.

4. Cinco asistentes administrativos usan una fotocopiadora de oficina. El tiempo promedio entre llegadas de asistentes es de 40 minutos y el tiempo promedio que pasa cada asistente en la fotocopiadora es de cinco minutos. Determina lo siguiente:

a. Probabilidad de que la fotocopiadora esté sin uso.

b. Cantidad de asistentes en la línea de espera en promedio.

c. Tiempo promedio que pasa un asistente esperando la fotocopiadora.

d. Durante una jornada de 8 horas, ¿cuántos minutos pasa un asistente en la fotocopiadora? ¿cuánto de ese tiempo es tiempo de espera?

e. ¿La administración debería considerar comprar una segunda fotocopiadora? Justifique

5. XX proporciona un servicio de un solo canal de cambio de aceite y lubricación de carros. Las llegadas ocurren a una tasa promedio de 2,5 carros por hora y la tasa media de servicio es de 5 carros por hora. Suponga que las llegadas siguen una distribución de Poisson y que los tiempos de servicio siguen una distribución exponencial.

   a. ¿Cuál es la cantidad promedio de carros en el sistema?

   b. ¿Cuál es el tiempo promedio que espera un carro para que empiecen a atenderlo?

   c. ¿Cuál es el tiempo promedio que pasa un carro en el sistema?

   d. ¿Cuál es la probabilidad de que un carro que llega tenga que esperar por el servicio?

   (Anderson, 2004. P. 630)

6. Los pacientes llegan al consultorio de un odontólogo a una tasa media de 2,8 pacientes por hora. El odontólogo puede tratar a los pacientes a una tasa media de 3 pacientes por hora. Un estudio muestra que, en promedio, un paciente espera 30 minutos antes de ver al odontólogo.

   a. ¿Cuál es la cantidad promedio de pacientes en la sala de espera?

   b. Si un paciente llega a las 10:10 a. m., ¿a qué hora se espera que salga del consultorio?

   (Anderson, 2004. P. 633)

7. Una gran aseguradora mantiene un sistema de cómputo central que contiene una variedad de información sobre las cuentas de los clientes. Los agentes de seguros usan líneas telefónicas para tener acceso a la base de datos de información de los clientes; en la actualidad, el sistema de cómputo central de la

empresa permite que 3 usuarios tengan acceso simultáneo a la computadora central, a los demás se les niega el acceso.

La administración se da cuenta de que con la expansión de su negocio se harán más solicitudes al sistema; el hecho de que se les niegue el acceso al sistema es ineficiente y molesto para los agentes. Las solicitudes de acceso siguen una distribución de probabilidad de Poisson, con una media de 42 llamadas por hora. La tasa media de servicio por línea es de 20 llamadas por hora.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que a un agente se le niegue el acceso al sistema?

b. ¿Cuál es la cantidad promedio de líneas de acceso en uso?

c. En la planeación para el futuro, la administración desea ser capaz de manejar una tasa de llegada de 50 llamadas por hora; además, la probabilidad de que a un agente se le niegue el acceso no deberá ser superior al valor calculado en el inciso b. ¿Cuántas líneas de acceso debería tener el sistema?

(Anderson, 2004. P. 635)

BIBLIOGRAFÍA

Anderson, D., Sweeney, D., Williams, T. (2004). *Métodos cuantitativos para los negocios*. México: Thomson.

Bellini M., F. (2004). *Universidad Santa María*. Recuperado en 2009 de http://www.investigacion-operaciones.com/Problemas_Resueltos_PL.htm

Render, B., Stair, R., Hanna, M. (2006). *Métodos cuantitativos para los negocios*. México: Pearson Educación.

Sectormatemática. Ejercicios resueltos de programación lineal. Recuperado el 28 de febrero de 2009 de http://www.sectormatematica.cl/contenidos/ejproglin3.htm

ANEXO 1
QSB

Este programa contiene los métodos cuantitativos más usados en las ciencias administrativas.

Los módulos que contiene QSB y que son de importancia para este curso son:

- Programación Lineal y entera (*Linear and Integer Programming*): Usa el método matricial y el método gráfico.
- Modelación de redes (*Network modeling*): Resuelve problemas de transporte, trasbordo y asignación.
- Teoría y sistemas de inventario (*Inventory theory and system*): Resuelve problemas de control de inventarios.
- Sistemas de colas (*Queuing analysis*): Resuelve problemas de colas.

Después de ingresar a QSB, debe escogerse el módulo requerido:

1. Programación lineal y entera:

La primera ventana que se encuentra contiene el archivo:

- Nuevo problema: Permite introducir un nuevo problema.
- Abrir Problema: Abre un problema que se ha guardado antes.

Luego se abre una ventana que contiene:

- Título del problema.
- Número de variables.
- Número de restricciones (*constraints*)
- Criterio en la función objetivo: Maximización o minimización.
- Formato de entrada de datos: Como una matriz o en forma gráfica.
- Tipo de variable: Continuos no negativos, enteros no negativos, binarios (0, 1).

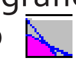
Por ejemplo, para el ejercicio 2 de la sección 1, los datos se introducirían así si se escoge el modelo matricial (recomendado):

VARIABLE	X_1	X_2	DIRECCIÓN	R.H.S.
Maximizar	8000	5000		
R1	2	1	≤	1200
R2	3	4	≤	2400
R3	1	1	≤	800
R4	1	-1	≤	450
Límite inferior	0	0		
Límite superior	M (infinito)	M (infinito)		

Notas: Para cambiar el sentido de una restricción se hace clic dos veces en la celda que contiene el signo ≤ y van apareciendo las diferentes opciones.

Por defecto, las variables son llamadas x_1 y x_2. Si se quiere cambiar esos nombres, debe seleccionarse **Edición** y **Nombres de variables**.

Para obtener los informes de respuestas y sensibilidad debe seleccionarse el ícono

Si el problema quiere desarrollarse por el método gráfico (solamente para problemas con dos variables) debe seleccionarse el ícono 

2. Modelación de redes:

La opción ***Nuevo Problema*** generará una ventana con las siguientes opciones:

- Tipo de problema: Flujo de red, problema de transporte, problema de asignación.
- Criterio objetivo: Maximización o minimización.
- Formato de entrada de datos: Como una matriz o en forma normal.
- Título del problema.
- Número de fuentes y destinos (si se escoge el modelo de transporte) o número de fuentes (si se escoge flujo de red) o número de objetos y asignaciones (si se escoge el modelo de asignación).

Por ejemplo, para el ejercicio 1 de la sección 2 primero debe indicarse que se va a realizar un problema de transporte; los datos se introducirían así si se escoge el modelo matricial:

DE / A	Bogotá	Caracas	Quito	SUMINISTRO
Medellín	3000	9000	10000	800
Armenia	2000	7000	8500	1500
DEMANDA	1000	700	600	

Si se escoge el modelo gráfico para introducir los datos aparecerá un campo con coordenadas; al pulsar doble clic sobre los espacios deseados se crean los nodos. En el campo de la derecha se puede editar cada nodo, al ser posible modificar su nombre, localización y capacidad.

Luego, para crear los arcos (rutas) se hace una línea manteniendo el clic sostenido entre cada nodo fuente y cada nodo destino. En el campo de la derecha se puede digitar el coeficiente en cada posible ruta.

Para obtener un informe con las mejores rutas debe seleccionarse el ícono 

Si se emplea el modelo gráfico para ingresar los datos , las demandas en los nodos de llegada deben escribirse como valores negativos.

Si lo que va a hacerse es un problema de trasbordo debe escogerse inicialmente **Flujo de red** (Network flow).

Si a cada agente se le va a asignar una sola tarea, puede trabajarse con Problemas de asignación (*Assigment problem*) como tipo de problema; pero si se van a implementar variantes, debe trabajarse con Flujo de red (*Network flow*)

3. SISTEMAS DE COLAS:

Primero se debe establecer si el modelo a tratar es un M/M (*Simple M/M System*) (Poisson-Exponencial) o un modelo general (*General Queuing System*).

a. Modelo M/M:

- Número de servidores (Number of Servers): K
- Tasa de servicio (Service Rate): μ
- Tasa de llegada de clientes (Customer Arrival Rate): λ
- Capacidad de la cola (Queue Capacity)
- Tamaño de la población de clientes (Customer Population)
- Costo del servidor ocupado (Busy Server Cost per Hour)
- Costo del servidor desocupado (Idle Server Cost per Hour)
- Costo de espera de los clientes (Customer Waiting Cost per Hour)
- Costo de los clientes siendo servidos (Customer Being Served Cost per Hour)
- Costo de los clientes siendo despachados (Cost of Customer Being Balked)
- Costo de la unidad de capacidad de la cola (Unit Queue Capacity Cost)

Notas:

- Los campos cuyos valores son desconocidos se dejan en blanco.
- Las letras M indican un valor infinito o muy grande.

Tomemos como base el siguiente ejemplo: A un banco entran en promedio 114 clientes por hora y se presenta una tasa media de servicio de 1,25 clientes por minuto. Las llegadas se aproximan por una distribución de Poisson y el tiempo de servicio por una distribución exponencial. ¿Cuáles son las características operativas del sistema?

En este caso los datos deben ingresarse de la siguiente manera:

Data Description	ENTRY
Number of servers	2
Service rate (per server per hour)	75
Customer arrival rate (per hour)	114
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hour	
Idle server cost per hour	
Customer waiting cost per hour	
Customer being served cost per hour	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

El número de servidores es 2 (como mínimo) porque $\lambda / \mu = 114/75 = 1{,}52$; eso significa que si emplean menos de dos servidores, el sistema no sería viable.

La tasa de servicio es 75 clientes por hora (1,25 clientes por minuto). Desde el principio puede seleccionarse la unidad de medida del tiempo.

Si el modelo no es M/M, el ingreso de datos es similar, pero debe señalarse el modelo que se ajusta al tiempo entre servicios y al tiempo entre llegadas (por defecto se muestra el exponencial, pero puede darse doble clic sobre dicha palabra y se presenta un cuadro de diálogo donde puede seleccionarse el modelo).

ANEXO 2
SOLVER DE EXCEL

Es un paquete agregado a Excel que puede utilizarse para resolver cualquier problema de programación lineal. Puede almacenar hasta 200 variables de decisión y 100 restricciones.

Si no está instalado, debe hacerse lo siguiente:

1. Hacer clic en el **botón de Microsoft Office** y, a continuación, hacer clic en **Opciones de Excel**.

2. Hacer clic en **Complementos** y, en el cuadro **Administrar**, seleccionar **Complementos de Excel**.

3. Hacer clic en **Ir**.

4. En el cuadro **Complementos disponibles**, activar la casilla de verificación **Complemento Solver** y, a continuación, hacer clic en **Aceptar**.

   Sugerencia: Si **Complemento Solver** no aparece en la lista del cuadro **Complementos disponibles**, hacer clic en **Examinar** para buscar el complemento.

   Si se le indica que el complemento Solver no está instalado actualmente en el equipo, hacer clic en **Sí** para instalarlo.

5. Una vez cargado el complemento Solver, el comando **Solver** estará disponible en el grupo **Análisis** de la ficha **Datos**.

Para obtener la solución óptima en un caso específico, debe hacerse lo siguiente:

1. En la columna A, se deben ingresar los títulos para identificar la función objetivo, las variables de decisión y las restricciones.

2. En la columna B, al frente del espacio correspondiente, se escriben las fórmulas para la función objetivo y cada una de las restricciones.

3. Seleccionar **Herramientas** del menú y, posteriormente, la opción **Solver**.

4. En el cuadro de diálogo **Parámetros de Solver** se ingresan la función objetivo, las restricciones, se indica qué es lo que se va a estimar (variables de decisión) y si la función objetivo se quiere maximizar o minimizar.

5. Dentro de las opciones, **adoptar modelo lineal** y **asumir no negativos**.

6. Resolver. Se puede obtener el informe de respuestas o el análisis de sensibilidad o ambos.

Para el ejemplo 2 del primer capítulo, los datos se ingresan de la siguiente manera:

A	B
Función objetivo	=8000*B2 + 5000*B3
X	
Y	
Restricción 1	=2*B2 + B3
Restricción 1	=3*B2 + 4*B3
Restricción 1	=B2 + B3
Restricción 1	=B2 - B3

Notas:

- El botón **Cambiar** permite modificar las restricciones introducidas y **Eliminar** sirve para borrar las existentes.

- Al abrir **Referencia de la Celda** cuando se introducen las restricciones, se especifica la ubicación de la celda que contiene la fórmula a la que hace referencia dicha restricción. Se introduce el tipo de restricción haciendo clic en la flecha del campo central desplegable (≤, ≥, =, int -número entero- o bin -binario-). El campo **Restricción** puede llevar una fórmula de celdas, una simple referencia a una celda o un valor numérico (lado derecho de la restricción). El botón Agregar añade la restricción especificada al modelo existente y vuelve a la ventana Agregar Restricción. El botón Aceptar añade la restricción al modelo y vuelve a la ventana Parámetros de Solver.

ANEXO 3
RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

Objeto de aprendizaje 1:

1. Debe invertir $5 millones en cada tipo de inversión. El rendimiento óptimo es $1 050 000.

2. 50 impresos tipo A y 100 tipo B.

3. 3 toneladas de pintura para exteriores y 1,5 toneladas de pintura para interiores, lo que dejaría una utilidad de 21 millones de pesos.

4. 4 onzas de A, 4 onzas de B y 2 onzas de C.

5.
   a. x = unidades del modelo económico
   y = unidades del modelo estándar
   x = unidades del modelo de lujo
   Objetivo: Maximizar $63000x + 50000y + 125000z$
   Sujeto a: $x + y + z \leq 200$, $x + 2y + 4z \leq 320$, $8x + 14y + 14z \leq 2400$

   b. 160 económicos y 40 de lujo. Máxima utilidad: $15 080 000

   c. Precio sombra de motores: 42 333; si se altera la disponibilidad de motores, la utilidad se altera en $42 333 en forma directa. (a más motores, mayor utilidad)

   Precio sombra de bobinas: 20 700; si se altera la disponibilidad de bobinas, la utilidad se altera en $420 700 en forma directa.

   Precio sombra del tiempo: 0; como no se gasta todo el tiempo disponible, una hora de más no afecta la utilidad.

   Es importante tener en cuenta que los precios sombra son válidos si cambia únicamente la restricción a la que se aluda y si se está dentro del rango permitido.

d. Modelo económico: aunque no deje la máxima utilidad, es el que menos recursos consume.

Modelo estándar: deja muy poca utilidad y gasta más recursos que el económico.

e. No cambiaría porque está en el rango permisible.

6. Si no se tiene que cumplir una condición adicional, lo mejor es que fabrique semanalmente 2 mesas sencillas y 292 lujosas.

7. Si no se tiene que cumplir una condición adicional, lo mejor es que fabrique mensualmente 848 puertas y ningún pasamanos.

Objeto de aprendizaje 2:

1.

De / A	NA1	NA2	E1
Rionegro	35		15
Bogotá		30	

De / A	M1	M2	M3	M4
NA1		35		
NA2	15	5		10
E1			15	

Con este programa, los costos de transporte serían de 585 euros semanalmente.

2.

	Destino		
Origen	**Cartagena**	**Cali**	**Bucaramanga**
Medellín	3000		5000
Bogotá		2500	200

3. El especialista 1 debe asignarse al cliente B, el especialista 2 al cliente C y el especialista 4 al cliente A.

4.

	Almacén	
Planta	**1**	**2**
1	450	
2		600
3	250	

	Cliente			
Almacén	**1**	**2**	**3**	**4**
1		300		400
2	300		300	

5. Asignarle a Horacio el proyecto 3; a Ernesto, el proyecto 2 y a Carlos, el proyecto 1.

Objeto de aprendizaje 3:

1.
   a. 5 servidores, para que $k\mu > \lambda$

   b. L_q = 9,3 usuarios W_q = 15,1 segundos

2.
   a. L_q = 1,49   L = 6,1 W_q = 2,4 segundos   W = 9,9 segundos

   b. L_q = 7,54   L = 14,83 W_q = 7,8 segundos   W = 15,3 segundos

   c. L_q = 4,67   L = 10,8 W_q = 7,6 segundos   W = 17,6 segundos

3. 3 clientes, 4 minutos

4.
   a. P_0 = 0,479
   b. 0,311
   c. 3 minutos
   d. Tiempo en fotocopiadora: 95,8 min/día
      Tiempo de espera en fotocopiadora: 35,8 min/día

5.
   a. L = 1
   b. 12 minutos

c. 24 minutos
d. 50%

6.

a. 1,4
b. 11:00 a. m.

7.

a. 0,2254
b. 1,627
c. Son necesarias 4 líneas